УДК 517.948

В. П. Танана, Н. Ю. Колесникова

ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОВОЙ ДИАГНОСТИКИ*

При тепловой диагностике ракетных двигателей (см. [1]) необходимо учитывать физические свойства используемых композиционных материалов. Это приводит к необходимости решения обратных задач для уравнений с разрывными коэффициентами. Высокие требования, предъявляемые к точности вычислений при решении данного класса задач заставляют разрабатывать оптимальные методы для их решения, а также получать точные оценки погрешности этих методов.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}; \quad 0 \leqslant x \leqslant x_1, \quad t \geqslant 0, \quad x_1 > 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2}; \quad x_1 \leqslant x \leqslant 1, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

где $\varkappa$ – некоторая известная положительная константа. Предположим, что решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ удовлетворяют начальным условиям

$$u_1(x,0) = 0; \quad 0 \leqslant x \leqslant x_1, \tag{3}$$

$$u_2(x,0) = 0; \quad x_1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{4}$$

а также граничным условиям

$$u_1(0,t) = f(t); \quad t \geqslant 0, \tag{5}$$

$$u_1(x_1,t) = g(t); \quad t \geqslant 0, \tag{6}$$

и условиям согласования

$$u_1(x_1,t) = u_2(x_1,t); \quad t \geqslant 0, \tag{7}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial u_1(x_1,t)}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial u_2(x_1,t)}{\partial x}; \quad t \geqslant 0, \tag{8}$$

*Работа поддержана грантом р_урал_а № 07-01-96001.

где λ_1 и λ_2 – некоторые известные положительные константы. Функции $u_2(1,t)$ и $\dfrac{\partial u_2(1,t)}{\partial x}$ требуется определить.

Предположим, что при некоторых $f(t)$, $g(t) \in L_2[0,\infty)$ существуют решения $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ такие, что для любого $x \in [0,x_1]$ интеграл $\displaystyle\int_0^\infty |u_1(x,t)|dt$ сходится, а для любого $x \in (x_1,1)$ сходится интеграл $\displaystyle\int_0^\infty |u_2(x,t)|dt$. Кроме того, интеграл $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}\right| dt$ сходится равномерно на $[0,x_1]$, интеграл $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}\right| dt$ сходится равномерно на $[x_1,1]$, интеграл $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}\right| dt$ сходится локально равномерно на $[0,x_1)$ и $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2}\right| dt$ сходится локально равномерно на $(x_1,1]$.

Пусть вместо функций $f(t)$ и $g(t)$ нам известны некоторые приближения $f_\delta(t)$, $g_\delta(t) \in L_2[0,\infty)$ и уровень их погрешности $\delta > 0$ такие, что

$$||f - f_\delta|| \leqslant \delta \quad \text{или} \quad ||g - g_\delta|| \leqslant \delta. \tag{9}$$

Требуется определить приближенное решение $u_{2\delta}(1,t)$ и $\dfrac{\partial u_{2\delta}(1,t)}{\partial x}$ задачи (1)–(8) и оценить их уклонения от точных решений $u_2(1,t)$ и $\dfrac{\partial u_2(1,t)}{\partial x}$.

2. Сведение задачи (1)–(8) на отрезке к задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений

Для сведения уравнений (1)–(2) к обыкновенным дифференциальным уравнениям используем косинус F_c и синус F_s преобразования, определяемые формулами

$$F_c(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u(t) \cos\tau t\, dt; \quad \tau \geqslant 0, \quad u \in L_2[0,\infty),$$

$$F_s(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u(t) \sin\tau t\, dt; \quad \tau \geqslant 0, \quad u \in L_2[0,\infty),$$

и при $u(0) = 0$ удовлетворяющие условиям

$$F_c(u') = \tau F_s(u) \quad \text{и} \quad F_s(u') = -\tau F_c(u); \quad u \in W_2'[0,\infty), \tag{10}$$

где $u'(t)$ – производная от функции $u(t)$.

Из теоремы Планшереля, сформулированной в [2, с. 19], следует изометричность преобразований F_c и F_s в пространстве $L_2[0,\infty)$. Отсюда следует изометричность в пространстве $\widehat{H} = L_2[0,\infty) + iL_2[0,\infty)$ преобразования F, определяемого формулой

$$F(u+iv) = \frac{1}{\sqrt{2}}F_c(u) - \frac{i}{\sqrt{2}}F_s(v),$$

где F_c и F_s – соответственно косинус и синус преобразования, а i – мнимая единица.

Отметим, что при условии $u(0) = 0$

$$\widehat{F}(u') := F(u' + iu') = \frac{\tau}{i}F(u+iu) = \frac{\tau}{i}\widehat{F}(u). \tag{11}$$

Здесь символ := означает «равно по определению».

Применяя преобразование $\widehat{F}$ к уравнению (1) и граничным условиям (5)–(6) с учетом начального условия (3) и используя формулу (11), получаем следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}_1(x,\tau)}{\partial x^2} - i\tau\widehat{u}_1(x,\tau) = 0; \quad 0 \leqslant x \leqslant x_1, \quad \tau \geqslant 0, \tag{12}$$

$$\widehat{u}_1(0,\tau) = \widehat{f}(\tau); \quad \tau \geqslant 0, \tag{13}$$

$$\widehat{u}_1(x_1,\tau) = \widehat{g}(\tau), \quad \tau \geqslant 0, \tag{14}$$

где

$$\widehat{f}(\tau) = \widehat{F}(f), \quad \widehat{g}(\tau) = \widehat{F}(g).$$

Мы считаем, что граничные условия f и g таковы, что все проделанные преобразования законны.

Решая уравнение (12), получаем, что

$$\widehat{u}_1(x,\tau) = a_1(\tau)e^{\mu_0 x\sqrt{\tau}} + b_1(\tau)e^{-\mu_0 x\sqrt{\tau}}; \quad \tau \geqslant 0, \tag{15}$$

где $\mu_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$.

Используя условия (13) и (14), определяем коэффициенты $a_1(\tau)$ и $b_1(\tau)$:

$$a_1(\tau) = \frac{e^{\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}}{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}} - 1}\widehat{g}(\tau) - \frac{1}{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}} - 1}\widehat{f}(\tau), \tag{16}$$

$$b_1(\tau) = \frac{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}}{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}} - 1}\widehat{f}(\tau) - \frac{e^{\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}}{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}} - 1}\widehat{g}(\tau). \tag{17}$$

Из (15)–(17) следует, что

$$\widetilde{h}(\tau) = T_1 \begin{pmatrix} \widehat{f} \\ \widehat{g} \end{pmatrix} := \frac{\partial \widehat{u}_1(x_1,\tau)}{\partial x} =$$

$$= \mu_0\sqrt{\tau}\left(\frac{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}+1}{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}-1}\widehat{g}(\tau) - \frac{2e^{\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}}{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}-1}\widehat{f}(\tau)\right),\ \tau \geqslant 0. \tag{18}$$

Аналогично, применяя к уравнению (2) преобразование $\widehat{F}$, получаем задачу

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}_2(x,\tau)}{\partial x^2} - \frac{i}{\varkappa}\tau\widehat{u}_2(x,\tau) = 0; \quad x_1 \leqslant x \leqslant 1, \quad \tau \geqslant 0, \tag{19}$$

$$\widehat{u}_2(x_1,\tau) = \widehat{g}(\tau); \quad \tau \geqslant 0, \tag{20}$$

$$\frac{\partial \widehat{u}_2(x_1,\tau)}{\partial x} = \widehat{h}(\tau); \quad \tau \geqslant 0, \tag{21}$$

где

$$\widehat{h}(\tau) := \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\widetilde{h}(\tau). \tag{22}$$

Решая задачу (19)–(21), получаем, что

$$\widehat{u}_2(x,\tau) = a_2(\tau)e^{\mu_0 x\sqrt{\frac{\tau}{\varkappa}}} + b_2(\tau)e^{-\mu_0 x\sqrt{\frac{\tau}{\varkappa}}}, \quad \tau \geqslant 0, \tag{23}$$

$$a_2(\tau)e^{\mu_0 x_1\sqrt{\frac{\tau}{\varkappa}}} + b_2(\tau)e^{-\mu_0 x_1\sqrt{\frac{\tau}{\varkappa}}} = \widehat{g}_\delta(\tau), \quad \tau \geqslant 0, \tag{24}$$

и

$$\mu_0\sqrt{\frac{\tau}{\varkappa}}a_2(\tau)e^{\mu_0 x_1\sqrt{\frac{\tau}{\varkappa}}} - \mu_0\sqrt{\frac{\tau}{\varkappa}}b_2(\tau)e^{-\mu_0 x_1\sqrt{\frac{\tau}{\varkappa}}} = \widehat{h}_\delta(\tau), \quad \tau \geqslant 0. \tag{25}$$

Откуда

$$\begin{pmatrix} \widehat{u}(\tau) \\ \widehat{v}(\tau) \end{pmatrix} = T_2 \begin{pmatrix} \widehat{g} \\ \widehat{h} \end{pmatrix} :=$$

$$:= \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\dfrac{\tau}{\varkappa}} & \dfrac{1}{\mu_0\sqrt{\dfrac{\tau}{\varkappa}}}\operatorname{sh}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{\varkappa}} \\ \mu_0\sqrt{\dfrac{\tau}{\varkappa}}\operatorname{sh}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\dfrac{\tau}{\varkappa}} & \operatorname{ch}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\dfrac{\tau}{\varkappa}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{g}(\tau) \\ \widehat{h}(\tau) \end{pmatrix}, \tag{26}$$

где $\widehat{u}(\tau) := \widehat{u}_2(1,\tau)$, а $\widehat{v}(\tau) := \dfrac{\partial \widehat{u}_2(1,\tau)}{\partial x}$.

Таким образом, рассматриваемая задача является некорректно поставленной в силу необходимости вычисления значений неограниченных операторов в формулах (18) и (26).

3. Регуляризация задачи (1)–(8)

Регуляризацию исходной задачи осуществим в два этапа.

На первом этапе найдем регуляризованное значение оператора T_1. Разобьем эту задачу на две. Первая из них, являющаяся сужением образа оператора T_1 на отрезок $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, корректна, а вторая – сужение на $[1, +\infty)$

$$T_{1,2}\begin{pmatrix}\widehat{f}\\ \widehat{g}\end{pmatrix} := \mu_0\sqrt{\tau}\left(\frac{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}+1}{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}-1}\widehat{g}(\tau) - \frac{2e^{\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}}{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}-1}\widehat{f}(\tau)\right), \quad \tau \geqslant 1, \tag{27}$$

является задачей вычисления значений неограниченного оператора.

Из (18) следует, что если $||\widehat{f}(\tau)|| \leqslant \delta$ и $||\widehat{g}(\tau)|| \leqslant \delta$, то

$$||\widetilde{h}(\tau)||_{L_2[0,1]} \leqslant \frac{4\delta}{\sqrt{2}x_1}; \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1. \tag{28}$$

Из изометричности преобразования $\widehat{F}$ следует, что

$$||\widehat{f} - \widehat{f}_\delta|| \leqslant \delta \quad \text{и} \quad ||\widehat{g} - \widehat{g}_\delta|| \leqslant \delta, \tag{29}$$

где $\widehat{f}_\delta = \widehat{F}(f_\delta)$, а $\widehat{g}_\delta = \widehat{F}(g_\delta)$.

Предположим, что граничные условия f и g таковы, что функция $\widetilde{h}(\tau)$ удовлетворяет условию

$$\int_1^\infty \tau^2|\widetilde{h}(\tau)|^2 d\tau \leqslant r^2, \tag{30}$$

где величина r известна.

Теперь используем для регуляризации вычисления оператора $T_{1,2}$ метод проекционной регуляризации, изложенный в [3].

Этот метод в данном случае заключается во введении функции $h^\alpha(\tau)$, определяемой формулой

$$h^\alpha(\tau) = \begin{cases} \widetilde{h}(\tau); & 1 \leqslant \tau \leqslant \alpha, \\ 0; & \tau > \alpha, \quad \alpha > 1, \end{cases} \tag{31}$$

в которой параметр $\alpha := \alpha(\delta)$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{r}{\alpha} = \varepsilon(\delta)\sqrt{\alpha}$, т. е.

$$\alpha := \alpha(\delta) = \left(\frac{r}{\varepsilon(\delta)}\right)^{2/3}, \qquad \varepsilon(\delta) := \frac{\left(1 + e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}x_1}\right)^2}{1 - e^{-\sqrt{2}x_1}}\delta. \tag{32}$$

Так как на основании (29) имеем, что при $\tau \geqslant 1$

$$\begin{aligned} &\left\|\left(\frac{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}+1}{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}-1}\widehat{g}_\delta(\tau) - \frac{2e^{\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}}{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}-1}\widehat{f}_\delta(\tau)\right) - \right.\\ &\qquad \left. - \left(\frac{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}+1}{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}-1}\widehat{g}(\tau) - \frac{2e^{\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}}{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}-1}\widehat{f}(\tau)\right)\right\| \leqslant \varepsilon, \end{aligned} \tag{33}$$

то из (30)–(33) следует, что приближенное значение оператора $T_{1,2}$: $h_\delta^{\alpha(\delta)}(\tau)$ определяется формулой

$$h_\delta^{\alpha(\delta)}(\tau) = \begin{cases} h_\delta(\tau); & 1 \leqslant \tau \leqslant \left(\dfrac{r}{\varepsilon(\delta)}\right)^{2/3}, \\ 0; & \tau > \left(\dfrac{r}{\varepsilon(\delta)}\right)^{2/3}, \end{cases} \qquad h_\delta(\tau) = T_1 \begin{pmatrix} \widehat{f}_\delta \\ \widehat{g}_\delta \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Теорема, сформулированная в [3], утверждает, что для функции $h_\delta^{\alpha(\delta)}(\tau)$, определенной формулой (34), справедлива оценка

$$\left\| h_\delta^{\alpha(\delta)}(\tau) - \widetilde{h}(\tau) \right\|_{L_2[1,\infty)} \leqslant \sqrt{2} r^{\frac{1}{3}} \varepsilon^{\frac{2}{3}}(\delta). \tag{35}$$

Если функцию $h_\delta^{\alpha(\delta)}(\tau)$ продолжить на всю полуось $[0,\infty)$ формулой

$$h_\delta^{\alpha(\delta)}(\tau) = \begin{cases} h_\delta(\tau); & 0 \leqslant \tau \leqslant \left(\dfrac{r}{\varepsilon(\delta)}\right)^{2/3}, \\ 0; & \tau > \left(\dfrac{r}{\varepsilon(\delta)}\right)^{2/3}, \end{cases} \tag{36}$$

то из (28) и (36) будет следовать, что

$$\left\| h_\delta^{\alpha(\delta)}(\tau) - \widehat{h}(\tau) \right\|_{L_2[0,\infty)} \leqslant \sqrt{2} r^{1/3} \varepsilon^{2/3}(\delta) + \frac{4\,\delta}{\sqrt{2}\,x_1}. \tag{37}$$

Теперь регуляризуем задачу вычисления неограниченного оператора T_2. Как и на предыдущем этапе, используем метод проекционной регуляризации.

Из формулы (37) следует, что

$$\left\| \widehat{h}_\delta(\tau) - \widehat{h}(\tau) \right\| \leqslant \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left[\sqrt{2} r^{1/3} \varepsilon^{2/3}(\delta) + \frac{4\,\delta}{\sqrt{2}\,x_1} \right], \tag{38}$$

где $\widehat{h}_\delta(\tau) = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} h_\delta^{\alpha(\delta)}(\tau)$.

Определим для неограниченного оператора T_2 регуляризующее семейство операторов $\{T_\alpha :\ \alpha > 0\}$ следующим образом:

$$T_\alpha \begin{pmatrix} \widehat{g} \\ \widehat{h} \end{pmatrix} = \begin{cases} T_2 \begin{pmatrix} \widehat{g} \\ \widehat{h} \end{pmatrix}; & \tau \leqslant \alpha, \\ 0; & \tau > \alpha, \end{cases} \tag{39}$$

а приближенное решение $\begin{pmatrix} \widehat{u}_\delta^\alpha \\ \widehat{v}_\delta^\alpha \end{pmatrix}$ определим формулой

$$\begin{pmatrix} \widehat{u}_\delta^\alpha \\ \widehat{v}_\delta^\alpha \end{pmatrix} = T_\alpha \begin{pmatrix} \widehat{g}_\delta \\ \widehat{h}_\delta \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Предположим, что граничные условия f и g таковы, что

$$\int_0^\infty \tau^2 (|\widehat{u}(\tau)|^2 + |\widehat{v}(\tau)|^2)\, d\tau \leqslant 2r^2. \tag{41}$$

Учитывая соотношение (41) и то, что

$$||T_\alpha|| = e^{(1-x_1)\sqrt{\frac{\alpha}{2\varkappa}}},$$

параметр регуляризации $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\delta)$ в формуле (40) определим из уравнения

$$\frac{\sqrt{2}\, r}{\alpha} = e^{(1-x_1)\sqrt{\frac{\alpha}{2\varkappa}}}\, \eta, \quad \text{где} \quad \eta = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left[\sqrt{2}\, r^{\frac{1}{3}} \varepsilon^{\frac{2}{3}}(\delta) + \frac{4\,\delta}{\sqrt{2}\, x_1}\right] + \delta. \tag{42}$$

Из теоремы, сформулированной в [3], следует, что

$$\sqrt{||\widehat{u}_\delta^{\bar{\alpha}(\delta)} - \widehat{u}||^2 + ||\widehat{v}_\delta^{\bar{\alpha}(\delta)} - \widehat{v}||^2} \leqslant \frac{2\, r}{\bar{\alpha}(\delta)}. \tag{43}$$

Из теоремы, сформулированной в работе [4], и соотношения (42) следует, что

$$\frac{2\, r}{\bar{\alpha}(\delta)}) \sim \ln^{-2}\left(\frac{1}{\delta}\right).$$

Используя преобразование $\widehat{F}^{-1}$, обратное к $\widehat{F}$, и беря действительную часть результата, получим окончательное решение задачи (1)–(8)

$$u_{2\delta}(1,t) = \mathrm{Re}\left\{\widehat{F}^{-1}\left[\widehat{u}_\delta^{\bar{\alpha}(\delta)}(\tau)\right]\right\},$$
$$v_\delta(t) = \mathrm{Re}\left\{\widehat{F}^{-1}\left[\widehat{v}_\delta^{\bar{\alpha}(\delta)}(\tau)\right]\right\}.$$

Из (43) следует, что при выполнении указанных выше условий для регуляризованных значений $u_{2\delta}(1,t)$ и $v_\delta(t)$ справедлива следующая оценка:

$$\left[\left\|u_{2\delta}(1,t) - u_2(1,t)\right\|^2 + \left\|v_\delta(t) - \frac{\partial u_2(1,t)}{\partial x}\right\|^2\right]^{1/2} \leqslant \frac{2r}{\bar{\alpha}(\delta)} \sim \ln^{-2}\left(\frac{1}{\delta}\right).$$

Литература

1. Исаков Г. Н., Кузин А. Я., Савельев В. Н. и др. Определение характеристик тонкослойных теплозащитных покрытий из решения обратных задач тепло- и массопереноса // Физика горения и взрыва. 2003. Т. 39, № 5. С. 86–97.

2. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука, 1961.

3. Танана В. П., Данилин А. Р. Об оптимальности регуляризующих алгоритмов при решении некорректных задач // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 7. С. 1323–1326.

4. Танана В. П. Об оптимальности по порядку метода проекционной регуляризации при решении обратных задач // Сиб. жури. индустр. математики. 2004. Т. 7, № 2. С. 117–132.

Статья поступила 05.01.2008 г.
Окончательный вариант 11.02.2008 г.